

TUDOMÁNSZERVEZÉSI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET

MA/H35

A HATÁROZOTT INTEGRÁL
FOGALMA

OKTATÓPROGRAM

MA/H35

A HATÁROZOTT INTEGRÁL
FOGALMA

Szerző: Dr. Gyurkó Györgyné

Lakcim: 3100 Salgótarján,
Vöröshadsereg u. 96.

Munkahely: Madách Gimnázium és SZKI

Program ismertető

A program a gimnáziumi 4. osztályos A-, B-fakultációjú matematika, valamint a szakközépiskolai 3. és 4. osztályos matematika tananyaghoz készült: - a határozott integrál fogalmának szemléletes bevezetésére használható.

A program funkciói:

- A függvény definiálása. - A felhasználó BASIC szintaktikai szabályai szerint adhatja meg a függvény képletét.
- Intervallum definiálása.
- A beosztások számának változtatása. (Egyenletes beosztással dolgozik.)
- Grafikon.
- Grafikon az alsó közelítő összeget szemléltető aláírt téglalapokkal.
- Grafikon a felső közelítő összeget szemléltető ráírt téglalapokkal.
- Összefoglaló táblázat: a közelítő összegek változása a beosztások számának függvényében.

Alkalmazott géptípus: HT- 1080Z

2. A program feladata

A program az alsó és felső közelítő összegek közös határértékeként definiált határozott integrál fogalom szemléletes bevezetésére alkalmas. Számolja és területekkel ábrázolja az alsó és felső integrálközelítő összegeket. Alkalmazható a matematika tárgy 3. és 4. osztályos szakközépiskolai, valamint a 4. osztályos gimnáziumi (A, B-fakultáció) tananyagának tanításához.

A kapcsolódó tankönyvfejezetek:

Gimnázium

dr. Korányi Erzsébet

Matematika (fakultativ A változat) IV. osztály

Integrálszámítás (84-181. oldal)

Hajnal Imre - dr. Nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos - dr. Urbán János

Matematika (fakultativ B változat) IV. osztály

Az integrál és alkalmazásai (11-105 oldalak)

Szakközépiskola

Bakó Zsuzsa
Matematika III. osztály
Integrálszámítás (265-314 oldalak)

3. A program adatai

A program neve: "INTEGR"
A gép típusa: HT-1080 Z
Programnyelv: BASIC
Memóriaigény: 8395 byte
Futásidő: Egy 45 perces órában, függvényként legalább tíz közelítést számolva, 4-5 függvényt kényelmesen bemutathatunk.

A készítés időpontja: 1983. november.

4. A program használata

4.1. A program betöltése és indítása

A program kazettáról a beépített magnón a

CLOAD # -1, "INTEGR"

paranccsal tölthető be. Indítás: RUN

4.2. Bejelentkezés

(10-160)

A képernyőn megjelenik a címlap. Egy billentyűnyomással továbblapozhatunk.

4.3. A felhasználó tájékoztatása az alkalmazható parancsokról (170-350)

A képernyőn megjelenik az 5.7. pont tartalma tömörített változatban. Ezt közvetlenül követően még csak az "F" vagy "V" parancs használható.

Az előbbire az 5.4. pont szerint folytatódik a program, az utóbbira befejeződik, egyébként hangjelzést ad.

4.4. A felhasználó tájékoztatása a függvény definiálásának módjáról (360-510)

A képernyőn megjelenik az 5.5. pont tartalma tömörített változatban. Egy billentyűnyomással továbblapozhatunk.

4.5. A függvény definiálása (520-590)

A képernyőn az EDIT üzemmód jelentkezik és a 2000 sorszámú utasítás módosítására vár. Az EDIT X parancsát alkalmazva az első függvény definiálásakor a 2000 Y = ... KÉREM IDEIRNI A FÜGGVÉNY KÉPLETÉT

sor jelentkezik (a további függvények definiálásakor természetesen az előzőleg definiált utasítás lesz ebben a sorban). Az EDIT parancsok alkalmazásával a kívánt függvény képletét a BASIC szintaktikának megfelelő formában beírjuk. Az EDIT-ből való kilépés után a futás

RUN 600

paranccsal folytatható.

4.6. Az intervallum definiálása (600, 650; 910-1140, 1980-2090)

Ez a programrész a függvény definiálását követően automatikusan, egyébként pedig csak külön parancsra (lásd. 4.7. pont) jelentkezik:

INTERVALLUM (A:B):? alsó határ, felső határ

Az A = B esetben az

EJNYE! FELTÉTEL: A < B

üzenet és hangjelzés jelentkezik. (Szintaktikusan hibás input esetén, itt és a további numerikus inputoknál is, a BASIC rendszer üzenetei következnek.)

Az intervallum hibátlan megadása esetén a függvény "letapogatása" következik (B-A)/120 lépésközzel.

Ehhez a függvényt realizáló rutin (1980-2090) aktivizálódik. Ha ebben (a 2000 sorban) szintaktikusan hibás kifejezéssel definiáltuk a függvényt, vagy a letapogatási pontok valamelyikében a függvény nem értelmezhető, úgy arról a hibajelzés most jelentkezik:

SAJNOS BAJ VAN A FÜGGVÉNNYEL. LÁSD ALÁBB
A RENDSZER HIBAJELZÉSÉT!
JAVÍTHATÓ: EDIT 2000 PARANCCSAL
POLYTATHATÓ: RUN 600 PARANCCSAL

Ezt az üzenetet a BASIC kézikönyvben felsorolt hibaüzenetek valamelyike követi, ami a hiba jellegét pontosítja, majd a vezérlés az 4.5. pontban leírt programrészhez adódik.

Sikeres "letapogatás" esetén az YT, IY, NX, NY változóknál ez a programrészlet állítja elő a közelítő összegek számításához és a függvény grafikonjának megrajzolásához szükséges adatokat, végül aktivizálja a beosztás-számot beolvasó rutint.

4. 7. A parancsok fogadása és érvényesítése

(600 - 670, 790-900)

Minden parancs végrehajtása után a parancsfogadó rutin lesz aktív. A rutin aktív állapotban az F, I, G, N, A, R, T, V, parancsok bármelyike kiadható, és a program eszerint ágazik el. A parancsok jelentése:

F Függvényt akarunk definiálni - Elágazás az 4.5. szerinti programrészlethez /IR=1/

I Intervallumot akarunk definiálni - Elágazás az 4.6. szerinti programrészlethez (IR=2)

G Grafikont akarunk rajzoltatni - Elágazás az 4.8. szerinti programrészlethez. (IR=3)

N Új beosztásszámot akarunk megadni - Elágazás az 4.9.-re (IR=4)

A Grafikont akarunk rajzoltatni az aláírt téglalapokkal - Elágazás az 4.10-re. (IR=5)

R Grafikont akarunk rajzoltatni a ráírt téglalapokkal - Elágazás az 4.11-re (IR=6)

T Összefoglaló táblázatot kérünk a közelítő összegekről. - Elágazás az 4.12-re (IR=7)

V Ki akarunk lépni a programból. - A BASIC READY promptja jelentkezik. (IR=8)

A parancsokat a program az INKEY\$ függvénnyel fogadja. Értelmezhetetlen parancs hangjelzést eredményez.

4.8. Grafikon rajzolása (680-690, 1480-1620)

A program a koordinátarendszert úgy tolja el és a függvény grafikonját úgy zsugorítja, hogy a képernyőn éppen a választott intervallum és azon a függvény teljes grafikonja látható legyen.

4.9. Új beosztásszám megadása (700- 720, 1150 - 1470)

A programrész az intervallum definiálása után automatikusan egyébként pedig külön parancsra (lásd 4.7. pont) jelelkezik.

Beosztások száma (N):? pozitív egész szám

A legnagyobb beosztás 120 lehet. (Ez a képernyő grafikus képességeivel függ össze).

Ha $N < 1$, akkor az

EJNYE! FELTÉTEL: $\emptyset < N$

üzenet és hangjelzés: ha $N > 120$, akkor a

SAJNOS CSAK $N \leq 120$ LEHET!

üzenet és hangjelzés jelentkezik, majd a program az új beosztásszámmra vár.

Az elfogadott beosztásszámmal (egyenletes beosztást képezve) ez a programrész számolja ki a közelítő összegeket (AS#, FS#); és ez képezi a területek rajzolásához szükséges adatokat az IY, IB, OQ, IW változóknak, valamint az összefoglaló táblázat számára feljegyzéseket készít az SK és NT tömbökben.

A közelítő összegeket meg is jeleníti a képernyőn:

ALSO KÖZELITŐ ÖSSZEG = real szám
FELSŐ KÖZELITŐ ÖSSZEG = reál szám

4.10. Az aláírt téglalapok rajzolása (730-740, 1630-1730, 2100-2250)

Az alsó közelítő összeget szemléltető aláírt téglalapok területe rajzolódik ki a függvény grafikonjával együtt. A gyorsító rutin (2100-2250) figyel, hogy mi volt az előző parancs. Ha előbb például a ráírt téglalapokat mutatta a képernyő, akkor ezekből képezi az aláírtakat - lévén így általában gyorsabb a megjelenítés.

4.11. A ráírt téglalapok rajzolása (750-760, 1740-1750, 2360-2490)

A felső közelítő összeget szemléltető ráírt téglalapok területe rajzolódik ki a függvény grafikonjával együtt.
A 2360-2490 rutint hasonlóan gyorsít, mint 5.10-ben a 2100-2250.

4.12. Összefoglaló táblázat a közelítő összegekről (770-780, 1860-1970)

A program nemcsak a beosztásszám megadása után (5.9 pont) tudja megadni a közelítő összegek értékét, hanem ezeket az SK tömbben is gyűjti, és az utolsó 14 közelítés adatai egy táblázatba mindig lekérdezhetők. A táblázat a képernyőn jelenik meg.

A táblázat formája:

BEOSZT.	ALSÓ KÖZELÍTŐ ÖSSZEG	FELSŐ KÖZELÍTŐ ÖSSZEG
xxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx
...	...	...
xxx	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxx

Elméleti alapok

A program az alsó és felső közelítő összegek közös határértékéként definiált határozott integrál fogalom szemléletes bevezetésére alkalmas. Számolja és területekkel ábrázolja az alsó és felső közelítő összegeket.

Alkalmazható a matematika 3. és 4. osztályos szakközépiskolai, valamint 4. osztályos gimnáziumi (A-B -fakultáció) tananyag tanításához.

Bemutatható vele:

- B1/ Mit értünk alsó, illetve felső integrálközelítő összegben.
- B2/ A beosztások finomításával az alsó (felső) közelítő összegek nem csökkennek (nem növekednek)
- B3) Egyetlen felső közelítő összeg sem kisebb, mint bármely alsó közelítő összeg.
- B4/ Ha a függvény az adott intervallumon integrálható, akkor az alsó és felső közelítő összegek közös határértékhez konvergálnak, miközben a beosztást finomítjuk.

Viszont a program - azon sajátosságai miatt, melyeket a következő bekezdéstől tárgyalunk - alkalmatlan a B4/ komplementer esetének bemutatására, vagyis arra, hogy az intervallumon értelmezett, korlátos, de nem integrálható függvénynél

az alsó és felső közelítő összegek nem tartanak közös határértékhez. Lásd a P1/ példát!

A program előnyös tulajdonsága, hogy az integrálandó függvény nincs rögzítve benne, hanem a futtatáskor adható meg, viszont ugyanezért a használata fokozottabb körültekintést kíván. - Bár tetszőleges olyan függvényt definiálhatunk, amelynél a leképezési utasítás egy BASIC - kifejezéssel megadható, számításba kell vennünk, hogy a program nem végez függvénydiszkussziót, csupán egy Δx lépésközzel (a programban: $DX \#$ / "letapogatja" a függvény grafikonját. Ha az érintett intervallum $[a;b]$, akkor $\Delta x = (b-a)/120$. (120-as osztás a képernyő grafikus képességei miatt elegendő). Tehát végül is a program a függvényből csak az

$f(a), f(a + \Delta x), f(a + 2 \cdot \Delta x), \dots$

$\dots, f(a + 119 \cdot \Delta x), f(b)$

értékeket ismeri, azaz alaposan "megtréfálható".

A program félrevezethető, illetve "megfojtható" a következő módon:

P1/ Olyan függvényt adunk meg, amely az adott intervallumon nem integrálható, de a letapogatott függvényértékek alapján mégis konvergens közelítő összegeket szolgáltat a program. Példa erre az

$$f: x \rightarrow \frac{1}{|x|}$$

függvény a $(-1.01; 1.01)$ intervallumon

P2/ Olyan függvényt adunk meg, amely integrálható, de az (a,b) intervallum bizonyos x_0 pontjában nincs értelmezve, és van olyan $0 \leq i \leq 120$, hogy $x_0 = a + i \cdot \Delta x$. Ekkor az x_0 egyszerűen a "torkán akad" a programnak: hibajelzéssel "megfullad". Példa erre az

$$f: x \rightarrow \frac{x-1}{x-1}$$

függvény a $(0; 1)$ intervallumon.

Ha mégis szeretnénk megmutatni, hogy egy függvényt az adott intervallumon akkor is lehet integrálni, ha egyes diszkrét pontokon nincs értelmezve, akkor az előbbi függvényt vehetjük például a $(0.01; 1.01)$ intervallumon, mert ekkor az $x=1$ pólus "áthull az osztáspontok rostáján".

P3/ A program számára "övon aluli ütös" ha olyan periódikus függvényt és intervallumot adunk meg neki, mellyel a függvény periódusa éppen Δx lesz. Példa erre az

f: $x \rightarrow \cos x$

függvény a $(-120\pi, +120\pi)$ intervallumon -
A program szerint a közelítő összegek 0 helyett (hibásan) 240π -hez konvergálnak.

Mintaalkalmazás

A következő példában a $\cos x$ függvénynek a $(-3.14, 3.14)$ intervallumon vett határozott integrálját közelítjük meg 10,40 120 beosztás mellett.

Betöltés, indítás:

READY

>CLOAD # -1, "INTEGR"

READY

>RUN

A HATÁROZOTT INTEGRÁL FOGALMA
ALSÓ ÉS FELSŐ KÖZELÍTŐ ÖSSZEGEK SZEMLÉLTETÉSE
AZ ALÁIRT ÉS RÁIRT TÉGLALAPOKKAL

KÉSZÜLT: A MADÁCH IMRE GIMNÁZIUM ÉS SZAKKÖZÉPISKOLÁBAN
SALGÓTARJÁN, 1983.

KÉREM EGY BILLENTYÜT LENYOMNI!

Miután a képernyőn a fent kiírtak megjelentek, egy billentyűzéssel léphetünk tovább. A képernyőn megjelenik:

PARANCSON

F FÜGGVÉNY DEFINIÁLÁSA
I INTERVALLUM DEFINIÁLÁSA
G GRAFIKON
N BEOSZTÁSOK SZÁMA, KÖZELÍTŐ ÖSSZEGEK
A GRAFIKON ALÁIRT TÉGLALAPOKKAL

R GRAFIKON RÁÍRT TÉGLALAPOKKAL
T TÁBLÁZAT A KÖZELÍTŐ ÖSSZEGEKRŐL
V VÉGE

AZ I, G, N, A, R, T PARANCSONKAT LEGALÁBB EGY F PARANCSNAK MEG
KELL ELŐZNI! AZ F PARANCS MAGÁBAN FOGLALJA AZ I, N PARANCSON-
KAT IS.

Most F parancssal továbblépünk. (Itt még a V parancs adható,
ami a program befejezését eredményezné, minden egyéb parancs-
ra figyelmeztető hangjelzés jelentkezik.)

A képernyőn a következő tájékoztatást kapjuk:

FÜGGVÉNY DEFINIÁLÁSA:

EGY BILLENTYÜNYOMÁSRA AZ EDIT ÜZEMMÓD JELENTKEZIK.
EKKOR EGY F: $X \rightarrow Y=F(X)$ ALAKU FÜGGVÉNY DEFINIÁLHATÓ,
AHOL $F(X)$ EGY SZINTAKTIKAILAG HELYES BASIC KIFEJEZÉS.

SIKERES MŰKÖDÉS CSAK AKKOR GARANTÁLHATÓ, HA A FÜGGVÉNY
RENDELKEZIK A DOKUMENTÁCIÓBAN LEÍRT JÓ TULAJDONSÁGOKKAL;
ELLENKEZŐLEG - KELLŐ KÖRÜLTEKINTÉS HIÁNYÁBAN - A PROGRAM
HIBAJELZÉSBE FULLAD, VAGY - MEG ROSSZABB ESET - FÉLREVEZETŐ
EREDMÉNYT AD.

BILLENTYÜ!

Egy billentyűt lenyomva, kiíródik:

AZ EDITÁLÁST AZ X PARANCCSAL CÉLSZERŰ KEZDENI.
A FÜGGVÉNY DEFINIÁLÁSA UTÁN A FUTÁS
RUN 600
PARANCCSAL FOLYTATHATÓ

2000

Az X billentyűt lenyomva megjelenik a program a 2000.
sorának eddigi tartalma:

2000 Y=... KÉREM IDEIRNI A FÜGGVÉNY KÉPLETÉT!

A kurzort balra léptetve, a tájékoztató szöveget töröljük, és
beírjuk:

2000 Y= COS(X)

Az EDIT-ből a NEW LINE billentyűvel kilépve, a futtatást így
folytatjuk:

RUN 600

Erre a program az intervallum meghatározását várja:

INTERVALLUM (A,B)?

Válaszunk után ez a képernyő tartalma:

INTERVALLUM (A,B):? -3,14 3,14

Ha itt - hibásan - az intervallum alsó határa nem lenne kisebb a felső határnál, akkor az előidézné a következő üzenetet (figyelmeztető hangjelzés kíséretében).

EJNYE! FELTÉTEL: $A < B$

A függvény és az intervallum ismeretében a program "letapogatja" a függvény értékeit (lásd 4.6.). A függvény képletét szintaktikusan hibásan adtuk meg, vagy a "letapogatás" olyan x helyet érintett, amelynél a függvény nem értelmezhető, akkor az most eredményezhet hibajelzést. (lásd 4.6.) Sikeres "letapogatás" után a beosztások számát kérdezi:

A BEOSZTÁSOK SZÁMA (N):? 10

Itt 10-es beosztást adtunk meg. - A beosztások száma legalább 1 és legfeljebb 120, ellenkező esetben az alábbi két hibajelzés egyike jelentkezik hangjelzés kíséretében:

EJNYE! FELTÉTEL $0 < N$

SAJNOS CSAK $N \leq 120$ LEHET!

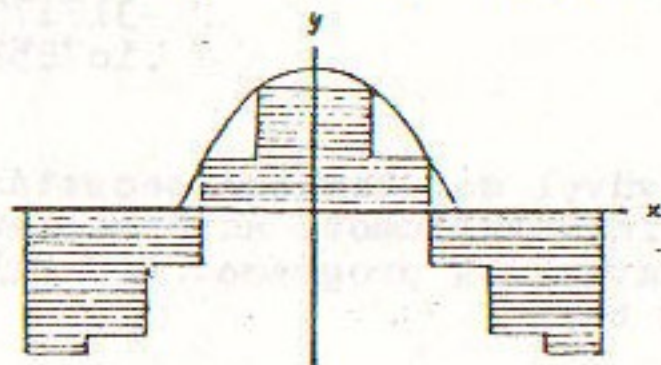
Hibátlan beosztásszám esetén a program kiszámítja a közelítő összegeket, és kiírja:

ALSÓ KÖZELITŐ ÖSSZEG=-1.25292

FELSŐ KÖZELITŐ ÖSSZEG=1.25298

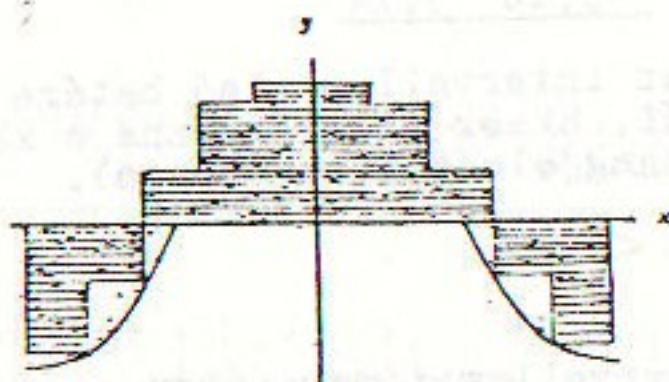
Itt jegyezzük meg, hogy mind a "letapogatás", mind a közelítő összegek számítása során a program hosszabb ideig állni látszik: a "letapogatás" átlagosan kb. 30 másodpercet, a közelítő összegek számítása pedig 10-30 másodpercet vesz igénybe.

Most az A billentyűt lenyomva, a képernyőn az aláírt téglalapok területét láthatjuk a függvény grafikonjával:



5.1. ábra

Az R billentyűt lenyomva, a ráírt téglalapok területét kapjuk:



5.2. ábra

Most a 40-es beosztásszámot szeretnénk megadni, nyomjuk meg az N billentyűt és ...
A BEOSZTÁSOK SZÁMA (N):? 40

Kapjuk:

ALSÓ KÖZELITŐ ÖSSZEG = -.310821

FELSŐ KÖZELITŐ ÖSSZEG= .317179

Az A és R billentyűk alkalmazásával ismét megtekinthetők az új beosztáshoz tartozó területek. Ezután...

N

A BEOSZTÁSOK SZÁMA (N):? 120

ALSÓ KÖZELITŐ ÖSSZEG= -.101482

FELSŐ KÖZELITŐ ÖSSZEG=.107852

Ha a három közelítést együtt kívánjuk látni, úgy nyomjuk meg a T billentyűt. A képernyőn a következő táblázat jelenik meg:

BEOSZT.	ALSÓ KÖZELITŐ ÖSSZEG	FELSŐ KÖZELITŐ ÖSSZEG
10	-1.25292	1.25298
40	-.310821	-.317179
120	-.101482	.107852

Ezután az N billentyűvel még további beosztásokat, az I billentyűvel másik intervallumot, az F billentyűvel újabb függvényt definiálhatunk. A programot a V billentyű lenyomásával fejezhetjük be.

